数理解析研究所講究録
450巻 1982年 177-187



# 複素解析的葉層構造の特異点

北大 理(教養) 諏訪 立雄

ここでは余次元1の局所葉層構造に限って，その開折理論についてのべる．詳細および一般の場合については[10]－[14]を参照されたい．

## 1. 局所葉層構造.

以後複素アファイン空間 $\mathbb{C}^n=\{(z_1,\cdots,z_n)\}$ の原点0の近傍で考えることとし，${}_n\mathcal{O}$（又は単に $\mathcal{O}$）で変数 $z_1,\cdots,z_n$ の収束巾級数環を，${}_n\Omega^p$（又は単に $\Omega^p$）で正則 $p$ 形式の0における芽のなす $\mathcal{O}$-加群を表わす．$\Omega^1$ は単に $\Omega$ とかく．

定義. （$\mathbb{C}^n$ の0での）余次元1の局所（複素解析的）葉層構造とは $\Omega$ の階数1の部分 $\mathcal{O}$-加群 $F$ で積分可能なもの，つまり $\omega$ を $F$ の生成元とすると $d\omega\wedge\omega=0$ が成り立つものをいう．

$\mathcal{F}=(\omega)$ が葉層構造のとき，集合 $\{z \mid \omega(z)=0\}$（の $O$ での芽）を $S(\mathcal{F})$ とかき $\mathcal{F}$ の特異点集合という．$S(\mathcal{F})$ の余次元が 1 のときは $\omega=f\omega'$, $f(0)=0$ とかけるので，以後 $\operatorname{codim} S(\mathcal{F}) \geqq 2$ と仮定する（このとき $\mathcal{F}$ は reduced であるという）．

定義．$\mathcal{F}$ が Haefliger 葉層構造であるとは，$\mathcal{F}$ が完全 1 形式 $df$ で生成されること．

以下で分るように，$\mathcal{F}=(df)$ の開折理論は関数芽 $f$ の right-morphisms に関する開折理論と本質的に同値である．

2．葉層構造の開折．

定義．$\mathcal{F}=(\omega)$ の開折（unfolding）とは，$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m=\{(z,t)\}$ の原点 $O$ での余次元 1 の局所葉層構造 $\tilde{\mathcal{F}}=(\tilde{\omega})$ で，$\tilde{\omega}|_{t=0}=\omega$ となるものをいう．$\mathbb{C}^m$ を $\tilde{\mathcal{F}}$ の parameter 空間という．

$\tilde{\mathcal{F}}=(\tilde{\omega})$ および $\tilde{\mathcal{F}}'$ をそれぞれ $\mathbb{C}^m=\{t\}$ および $\mathbb{C}^l=\{s\}$ を parameter 空間とする $\mathcal{F}=(\omega)$ の開折とするとき，$\tilde{\mathcal{F}}'$

が$\mathcal{F}$からのひきもどしであるとは，次の条件をみたす写像芽
$\Phi:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^l,0)\longrightarrow(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m,0)$ および $\varphi:(\mathbb{C}^l,0)\to(\mathbb{C}^m,0)$
が存在すること：

(1) 図式

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^l,0) & \xrightarrow{\ \Phi\ } & (\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m,0)\\ \downarrow & & \downarrow\\ (\mathbb{C}^l,0) & \xrightarrow{\ \varphi\ } & (\mathbb{C}^m,0)\end{array}$$

は可換，ただしたての写像は射影である．

(2) $\Phi|_{s=0}=id.$

(3) $\mathcal{F}'$ は $\Phi^*\tilde{\omega}$ で生成される．

$F$の開折$\mathcal{F}$が versal であるとは，$F$の任意の開折が$\mathcal{F}$からのひきもどしであることと定義する．

$F=(\omega)$ を $\mathbb{C}^n$ の $0$ での局所葉層構造とし，$\Omega_F=\Omega/F$ とおく．$F$の開折理論では群 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F,\mathcal{O})$ が重要な役割をはたす．我々の場合，$\omega=\sum_{i=1}^{n}f_i\,dz_i$ ，$f_i\in\mathcal{O}$ と表わしておくと

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F,\mathcal{O})=\mathcal{O}/(f_1,\cdots,f_n)$$

と書ける．ここで $(f_1,\cdots,f_n)$ は $f_1,\cdots,f_n$ で生成された ideal である．$\mathcal{O}$ の元 $h$ に対する $\mathcal{O}/(f_1,\cdots,f_n)$ の元を $[h]$ で表わしておく．$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F,\mathcal{O})$ が複素ベクトル空間とし

て有限次元であるためには $\delta(F)=\{0\}$ であることが必要十分である．$\dim_{\mathbb{C}} Ext^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F, \mathcal{O})$ と Bott residue([1])の関係については[13]を参照されたい．

さて，Fの開折 $\mathcal{F}=(\tilde{\omega})$ に対し，無限小開折写像

$$\rho : T_{\mathbb{C}^m, 0} \longrightarrow Ext^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F, \mathcal{O})$$

が定義される．ここで $T_{\mathbb{C}^m,0}$ は $\mathcal{F}$ の parameter 空間 $\mathbb{C}^m$ の $0$ における正則接空間である．$\rho$ は $\mathbb{C}$-線型写像で，接ベクトル $\frac{\partial}{\partial t_k}$ に対し，$h_k = \langle \tilde{\omega}, \frac{\partial}{\partial t_k} \rangle |_{t=0}$ ($\tilde{\omega}$ の $dt_k$ の係数) の $\mathcal{O}/(f_1, \cdots, f_n)$ での類 $[h_k]$ を対応させるものである．ここで次のような問題が考えられる．

(1) $Ext^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F, \mathcal{O})$ のどの元がFの開折からくるか？

(2) $Ext^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F, \mathcal{O})$ のどの元がFの一次開折からくるか？

一般に(1)は容易でない．次節で(2)を考える．

## 3. 一次(無限小)開折.

${}_{n+1}\Omega$ を $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C} = \{(z, t)\}$ 上の正則1形式の原点での芽のなす ${}_{n+1}\mathcal{O}$-加群とする．

**定義** 葉層構造 $F=(\omega)$ の一次(無限小)開折とは ${}_{n+1}\Omega$ の階数1の部分 ${}_{n+1}\mathcal{O}$-加群 $\mathcal{F}^{(1)} = (\tilde{\omega})$ で次をみたすものをいう：

(1) $\tilde{\omega}|_{t=0} = \omega$,

(2) $d\tilde{\omega}\wedge\tilde{\omega} \equiv 0 \mod. t^2, tdt.$

ただし，$\tilde{\omega}$ は $\mathcal{F}^{(1)}$ の生成元である．

$\mathcal{F}$ の2つの一次開折の間の同値関係は自然に定義される．$\mho(\mathcal{F})$ で $\mathcal{F}$ の一次開折の同値類全体の集合を表わすことにする．$\mathcal{F}^{(1)} = (\tilde{\omega})$ が $\mathcal{F} = (\omega)$ の一次開折のとき，

$$\tilde{\omega} \equiv \omega + \omega^{(1)}t + h\,dt \qquad \mod. t^2, tdt$$

$\omega^{(1)} \in {}_n\Omega$, $h \in {}_n\mathcal{O}$ と書け，$\mathcal{F}^{(1)}$ に $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O})$ の元 $[h]$ を対応させることができる．さらに $\mathcal{F}^{(1)}$ と $\mathcal{F}^{(1)\prime}$ を $\mathcal{F}$ の2つの一次開折とするとき，$\mathcal{F}^{(1)}$ と $\mathcal{F}^{(1)\prime}$ が同値であるためには，対応する $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O})$ の元が一致することが必要十分であることが容易に確かめられる．従って $\mho(\mathcal{F})$ は $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O})$ の部分集合と考えることができる．

<u>命題.</u> $\mho(\mathcal{F}) = \{[h] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}) \mid h\,d\omega = \eta\wedge\omega,\ \eta\in\Omega\}$.

上の命題は又次のように表わすこともできる。

$Z^2 = \{\tau\in\Omega^2 \mid \tau\wedge\omega = 0\}$, $B^2 = \{\tau\in\Omega^2 \mid \tau = \eta\wedge\omega\}$,

$H^2 = Z^2/B^2$ とおき，$Z^2$ の元 $\tau$ に対応する $H^2$ の元を $[\tau]$ と書くと

$$\mho(\mathcal{F}) = \{[h] \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_{\mathcal{F}}, \mathcal{O}) \mid [h\,d\omega] = 0 \text{ in } H^2\}.$$

## 4. Malgrange の定理.

まず特に F が Haefliger の場合を考えてみる. このときは F の生成元として完全形式 $df$ がとれるので,

$$\mathcal{U}(F) = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F, \mathcal{O}) = \mathcal{O}/(\partial f)$$

となる. ただし $(\partial f)$ は $\frac{\partial f}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial z_n}$ で生成された ideal である. さらに $\mathcal{U}(F)$ の任意の元 $[h]$ には対応する F の開折が存在する. つまり $\mathcal{F} = (\tilde{\omega})$, $\tilde{\omega} = d(f + ht) = df + dh \cdot t + h\,dt$ を考えればよい.

次に $H^2 = 0$ の場合にも $\mathcal{U}(F) = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F, \mathcal{O})$ となるが, この条件は例えば $\mathrm{codim}\, S(F) \geq 3$ ならみたされている ([9]). 実際, 次の定理が成り立つ.

定理 (Malgrange [4]). $\mathrm{codim}\, S(F) \geq 3$ なら F は Haefliger 葉層構造.

証明には, $F = (\omega)$ の開折 $\mathcal{F} = (\tilde{\omega})$ で

$$\tilde{\omega} = \sum_{p \geq 0} \omega^{(p)} t^p + dt, \quad \omega^{(0)} = \omega$$

の形のものを構成する. $H^2 = 0$ から, $d\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0$ を形式的にみたす $\omega^{(p)}$, $p \geq 1$, の存在が分る. この級数の収束性には Malgrange の privileged neighborhood の定理 ([4]) が用いられる. このようにしてできた $\tilde{\omega}$ は特異点を持たないので Frobenius の定理により正則な積分因子で原点で 0 にならない

ものを持つが，これを $t=0$ に制限すれば $\omega$ の積分因子が出来るわけである.

## 5. 普遍性定理.

$\mathcal{F}=(\omega)$ を局所葉層構造とする.

定義. $\mathcal{F}$ の開折 $\mathfrak{F}$ が infinitesimally versal であるとは，$\mathfrak{F}$ の無限小開折写像の像が $U(\mathcal{F})$ と一致すること.

定理（普遍性定理）. $\mathcal{F}$ を余次元1の（reducedな）局所葉層構造とし，$\mathfrak{F}$ を $\mathcal{F}$ の開折とする. このとき，$\mathfrak{F}$ が infinitesimally versal なら versal である.

証明は，(I) $\mathcal{F}$ の任意の開折を $\mathfrak{F}$ からひきもどす写像の形式的巾級数としての構成，および (II) (I) の級数の収束性の証明，から成る. (I) は複雑で，積分可能条件をうまく使う必要がある. (II) には，Kodaira-Spencer [3] の方法と Malgrange [4] の方法を用いる.

以下，この定理の直接的結果をいくつか記すが，まずいくつか定義をのべる.

定義. $\mathcal{F}=(\omega)$ の開折 $\mathfrak{F}$ が自明であるとは，submersion の

芽 $\Phi:(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m,0)\to(\mathbb{C}^n,0)$ が存在し，$\mathcal{F}$ は $\Phi^*\omega$ で生成されること。ただし $\mathbb{C}^m$ は $\mathcal{F}$ の parameter 空間である．

<u>定義.</u> F の開折 $\mathcal{F}$ が universal であるとは versal かつ無限小開折写像が 1 対 1 であること．

<u>命題.</u> $\mathcal{F}$ が F の universal な開折ならば，$\mathcal{F}$ の任意の開折は自明．

<u>普遍性定理の系.</u>

I. $U(F)=0$ ならFは自分自身の universal な開折．従ってFの任意の開折は自明．

II (Cerveau-Neto [2]). $\omega = z_1\cdots z_n \sum_{i=1}^n a_i \dfrac{dz_i}{z_i}$, $a_i \neq a_j \neq 0$，とすると $F=(\omega)$ の任意の開折は自明（実際 $U(F)=0$）.

III (Mattei-Moussu [7]). F が Haefliger ならFの任意の開折も Haefliger.

IV (Mather [6]). $\tilde{f}$ が関数芽 $f$ の infinitesimally right-versal な開折なら $\hat{f}$ は right-morphism に関し versal な $f$ の開折（[15] も参照）.

例1. $\mathbb{C}^2=\{(x,y)\}$ 上の1形式

$$\omega=(2xy+y^2)dx-(x^2+2xy)dy$$

を考え $F=(\omega)$ とする。このとき，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F,\mathcal{O})=\mathbb{C}^4$ で，$[1],[x],[y]$ および $[xy]$ を基底にとれる．さらに $U(F)=\mathbb{C}^2$ で $[x-y]$ と $[xy]$ を基底にとれることは容易に分る．$\mathcal{F}=(\tilde{\omega})$，

$$\tilde{\omega}=(2xy+y^2-yt-3s)dx-(x^2+2xy+xt-3s)dy$$
$$+3(xy-s)dt+(x-y+t)ds$$

とおくと これは $F=(\omega)$ の infinitesimally versal な開折である．従って普遍性定理により $F$ の universal な開折であることが分る．$\mathbb{C}^4=\{(x,y,t,s)\}$ の座標を次のように変換する：

$$x'=x,\quad y'=y,\quad t'=t+x-y,\quad s'=s-xy.$$

とすると $\tilde{\omega}=t'ds'-3s'dt'$ となる。これから $\mathcal{F}$ の leaves（積分多様体）は $(x-y+t)^3=C(xy-s)$ で与えられることが分る。

例1. $\mathbb{C}^2=\{(x,y)\}$ 上の1形式

$$\omega=y\,dx+(x+x^2y)dy$$

を考え $F=(\omega)$ とする。このとき $U(F)=\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega_F,\mathcal{O})=\mathbb{C}$ で，$[1]$ が基底になるが $\omega$ は正則な積分因子をもたない（[8] p61, 問3）ので $[1]$ に対応する開折は存在しない。

## References


[1] P. Baum and R. Bott, Singularities of holomorphic foliations, J. Differential Geometry 7 (1972) 279-342.

[2] D. Cerveau et A.L. Neto, Formes intégrables tangentes à des actions commutatives, Université de Dijon, 1979.

[3] K. Kodaira and D.C. Spencer, A theorem of completeness for complex analytic fibre spaces, Acta Math. 100 (1958) 281-294.

[4] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 1. Codimension un, Publ. Math. I.H.E.S. 46 (1976) 163-173.

[5] B. Malgrange, Frobenius avec singularités, 2. Le cas général, Invent. Math. 39 (1977) 67-89.

[6] J. Mather, unpublished notes on right equivalence.

[7] J.F. Mattei et R. Moussu, Holonomie et intégrales premières, Université de Dijon, 1979.

[8] 大島利雄, 小松彦三郎, 1階偏微分方程式, 岩波講座 基礎数学 岩波書店, 1977.

[9] K. Saito, On a generalization of de Rham lemma, Ann. Inst. Fourier 26 (1976) 165-170.

[10] T. Suwa, Unfoldings of complex analytic foliations with singularities, preprint.

[11] T. Suwa, A theorem of versality for unfoldings of complex analytic foliation singularities, Invent. Math. 65 (1981) 29-48.

[12] T. Suwa, Kupka-Reeb phenomena and universal unfoldings of certain foliation singularities, preprint.

[13] T. Suwa, Residues of complex analytic foliation singularities and the Riemann-Roch theorem for embeddings, preprint.

[14] T. Suwa, Singularities of complex analytic foliations, preprint.

[15] G. Wasserman, Stability of Unfoldings, Lecture Notes in Mathematics 393, Springer-Verlag, Berlin, 1974.